

Ein Modell des elastisch-plastischen Übergangsverhaltens metallischer Werkstoffe

Mahrenholtz, Oskar
Ismar, Heinz

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 30, 1979,
S.138-144



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Ein Modell des elastisch-plastischen Übergangsverhaltens metallischer Werkstoffe

Von **Oskar Mahrenholtz**, Hannover und **Heinz Ismar**, Saarbrücken *)

1. Einleitung

Die phänomenologische Theorie großer Formänderungen metallischer Werkstoffe arbeitet mit einem Stoffgesetz, das aus Fließkriterien und Fließregel besteht. Das Fließkriterium ist die wesentliche Brücke zum jeweiligen Werkstoffverhalten. Elastische Verformungen sind in dem Modell vom Ansatz her nicht enthalten. Die Einkerbung ist unerheblich, solange man nur an der Beschreibung großer plastischer Formänderungen interessiert ist. Dies gilt für technische Umformvorgänge wie Schmieden, Walzen und dergleichen. Gleichwohl gehört auch in der plastischen Phase zu jedem Spannungszustand ein elastischer Formänderungszustand, der bei Entlastung zu Eigenspannungen führt. Von grundsätzlichem Interesse ist auch der Übergang vom elastischen zum plastischen Werkstoffverhalten. Das einfachste zugehörige Modell für einen isotropen Werkstoff ist das nach Prandtl-Reuss [1], bei dem sich an die linear-elastische Phase eine ideal-plastische anschließt. Wir folgen der Formulierung in [2]:

$$d\epsilon_{ij} = \underbrace{\frac{3}{2} \frac{d\epsilon_v^p}{k_f} \sigma'_{ij}}_{d\epsilon_{ij}^p} + \underbrace{\frac{1+\nu}{E} (d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} d\sigma_{kk})}_{d\epsilon_{ij}^E} \quad (1.1)$$

Hierin ist $d\epsilon_{ij}^p$ der plastische Anteil des Formänderungszinkrements $d\epsilon_{ij}$, der erst bei Erfüllung des Fließkriteriums, also bei Plastifizierung, auftritt. Im Spannungsraum endet dann der „Spannungsvektor“ – gebildet aus den Koordinaten des Spannungstensors – auf der durch das Fließkriterium definierten Fließfläche. Der Anteil $d\epsilon_{ij}^E$ beruht auf linear-elastischem Werkstoffverhalten; dies ist durch die beiden Konstanten E und ν gekennzeichnet. Er folgt aus dem „Hookeschen Gesetz“

$$\epsilon_{ij}^E = \frac{1+\nu}{E} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) \quad (1.2)$$

Jedem Spannungszustand, beschrieben durch die Koordinaten σ_{ij} des Spannungstensors, ist danach – auch im plastischen Bereich – eindeutig eine elastische Verzerrung zugeordnet.

Die Fließregel nach v. Mises [3]

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{d\epsilon_v^p}{k_f} \sigma'_{ij} = d\lambda \sigma'_{ij} \quad (1.3)$$

*) Eduard Pestel zum 65. Geburtstag am 29. Mai 1979 gewidmet.

verknüpft die Koordinaten σ'_{ij} des Spannungsdeviators mit den Koordinaten $d\epsilon^p_{ij}$ des Tensors der Formänderungssinkremente. Der koordinateninvariante Faktor $d\lambda$ enthält über die Formänderungsfestigkeit k_f das Werkstoffverhalten und über das Inkrement $d\epsilon^p_v$ die momentane, örtliche Formänderungskinematik [4].

Bei diesem Werkstoffmodell ist der Übergang vom rein elastischen in den plastischen – genauer: elastisch-plastischen – Verformungszustand mit einer Unstetigkeit im Spannungszustand verbunden [5]. Dies ist bei einem physikalischen Modell zwar nichts Ungewöhnliches, man darf allerdings annehmen, daß der reale Werkstoff diese Unstetigkeit nicht kennt.

Wir stellen nun die Frage: Wie muß ein Fließkriterium beschaffen sein, das diese Unstetigkeit vermeidet? Die Antwort darauf wird im folgenden gegeben.

2. Fließpotentiale

Der tragfähigste Einstieg in die Plastomechanik ist der über das Potentialgesetz nach v. Mises [3]:

$$d\epsilon^p_{ij} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma'_{ij}} \quad (2.1)$$

(vgl. auch [4]). Das Fließpotential $F = F(\sigma'_{ij})$ bestimmt die Form der Fließregel. So gehört zur Fließregel (1.3) das quadratische Potential $F = I_2^{\sigma'}$; $I_2^{\sigma'}$ ist die zweite Hauptinvariante des Spannungsdeviators. Die Höhe des Fließpotentials hängt von der Formänderungsfestigkeit k_f des Werkstoffs und damit von der Verformungsgeschichte ab, weshalb die Form $F = F(\sigma'_{ij})$ eine Näherung ist [5]. Man erhält dann das Fließkriterium, das im Hauptspannungsraum die Fließfläche ergibt. Auf dieser Fließfläche endet bei Plastifizierung der „Spannungsvektor“, gebildet aus den Koordinaten des Spannungstensors.

Der allgemeine Ansatz für ein Fließpotential bei isotropem Werkstoff lautet

$$F = F(I_1^{\sigma}, I_2^{\sigma}, I_3^{\sigma}) \quad (2.2)$$

mit $I_1^{\sigma}, I_2^{\sigma}, I_3^{\sigma}$ als den drei Hauptinvarianten des Spannungstensors. Es wird sich zeigen, daß der von uns geforderte stetige Übergang des Spannungsvektors durch ein Fließpotential der Form

$$F = F(I_1^{\sigma}, I_2^{\sigma}) = \alpha_1 (I_1^{\sigma})^2 + \alpha_2 I_2^{\sigma} \quad (2.3)$$

gewährleistet werden kann; α_1 und α_2 sind Ansatzfreiwerte. Führt man das Fließpotential (2.3) in das Potentialgesetz (2.1) ein, so folgt nach einiger Rechnung der Spannungsvektor $\underline{\sigma}$ im Hauptspannungsraum mit den Basisvektoren \underline{e}_H ($H = I, II, III$) zu

$$\underline{\sigma} = \frac{1}{\alpha_2 d\lambda} [d\epsilon^p_H \underline{e}_H + \left(\frac{1}{18} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{1}{3}\right) I_1^* \underline{e}], \quad (2.4)$$

worin

$$\underline{e} = \underline{e}_I + \underline{e}_{II} + \underline{e}_{III}$$

und I_1^* die erste Invariante des Tensors der plastischen Formänderungssinkremente ist. Diese Gleichung wird später zur Stetigkeitsbetrachtung herangezogen.

3. Modifizierter Prandtl-Reuss-Ansatz

Aus Gl. (1.2) leitet man ab

$$\underline{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} [\epsilon_H^E \underline{e}_H + \frac{\nu}{1-2\nu} I_1^{**} \underline{e}] \quad (3.1)$$

mit I_1^{**} als erster Invariante des Tensors der elastischen Formänderungen. Dieser Zusammenhang gilt auch bei Plastifizierung. Jedoch wird dann der Spannungszustand durch die plastischen Formänderungszinkremente nach Gl. (2.4) bestimmt. Die nach Gl. (1.2) zugeordneten elastischen Verzerrungen verhalten sich dann hinsichtlich des Spannungsaufbaus passiv; bis zur Plastifizierung bestimmen sie dagegen den Spannungszustand.

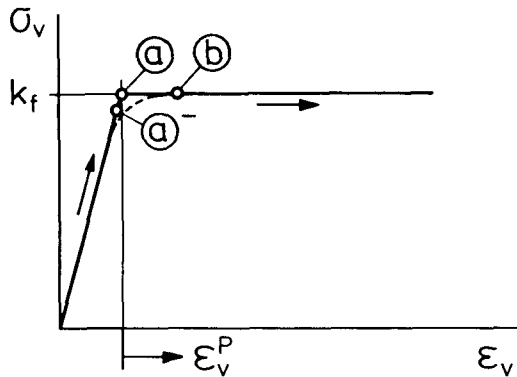


Bild 1:

Vergleichsspannung σ_v in Abhängigkeit von der Vergleichsformänderung ϵ_v für einen linearelastisch-idealplastischen Werkstoff.

- Ⓐ Ende des elastischen Zustandes
- Ⓐ Beginn der Plastifizierung
- Ⓑ Beginn der plastischen Volumenkonstanz
- Belastungsrichtung

Wir verfolgen nun einen Belastungsvorgang, der zur Plastifizierung führt (Bild 1). Auf den Achsen des Spannungs-Dehnungsbildes sind Vergleichsspannung und Vergleichsdehnung aufgetragen. Nach dem vorher Gesagten wird der Spannungszustand beim Erreichen der Fließgrenze durch die elastischen Verzerrungen gemäß Gl. (3.1) bestimmt (Punkt Ⓐ in Bild 1), bei Plastifizierung greift Gl. (2.4) (Punkt Ⓐ in Bild 1). Die geforderte Stetigkeit des Spannungsvektors $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^{\ominus} = \underline{\sigma}^{\oplus}$ führt somit auf

$$\left(\frac{d\epsilon_H^P}{\alpha_2 d\lambda} \right)^{\oplus} = \left(\epsilon_H^E \frac{E}{1+\nu} \right)^{\oplus}, \quad (3.2a)$$

$$\left(\left(\frac{1}{18} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{1}{3} \right) \frac{I_1^*}{\alpha_2 d\lambda} \right)^{\oplus} = \left(\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} I_1^{**} \right)^{\oplus}. \quad (3.2b)$$

Wir nehmen nun zusätzlich an – und werden diese Annahme physikalisch rechtfertigen –, daß das erste plastische Formänderungsinkrement proportional ist der elastischen Verzerrung bei Fließbeginn:

$$(d\lambda)^{\oplus} = \frac{(d\epsilon_H^P)^{\oplus}}{(\epsilon_H^E)^{\oplus}} = \frac{(I_1^*)^{\oplus}}{(I_1^{**})^{\oplus}} \quad (3.2c)$$

Mit Gl. (3.2c) liefern die Gln. (3.2a, b)

$$\alpha_1^{\oplus} = \frac{1}{2} \frac{1-2\nu}{3E}; \quad \alpha_2^{\oplus} = \frac{1+\nu}{E} \quad (3.3)$$

Das Fließpotential bei beginnender Plastifizierung ist somit nach Gl. (2.3)

$$F^{\oplus} = \left(\frac{1}{2} \frac{1-2\nu}{3E} (I_1^*)^2 + \frac{1+\nu}{E} I_2^{**} \right)^{\oplus} \quad (3.4)$$

Dieser Ausdruck ist aber auch das elastische Potential $U = U^{\oplus}$ gemäß $\epsilon_{ij}^E = \frac{\partial U}{\partial \sigma_{ij}}$. Die Annahme (3.2c) führt also auf

$$F^{\oplus} = U^{\oplus} \quad (3.5)$$

bei Plastifizierung, sie ist bei isotropem Werkstoff physikalisch sinnvoll. Das Potential (3.4) findet man bereits bei Beltrami [6], der es als Bruchkriterium verstanden hat.

Das Fließpotential (3.4) ist wegen $I_1^* \neq 0$ mit Volumendehnung verbunden. Bei metallischen Werkstoffen kann bei größeren Formänderungen die Volumendehnung im Vergleich zur Gestaltformänderung vernachlässigt werden. Der Ansatzfreiwert (Ansatzfunktion) α_1 wird daher mit zunehmender Formänderung gegen Null gehen (Punkt \ominus in Bild 1).

Für einen Belastungsvorgang läßt sich somit ein gegenüber Gl. (1.1) modifizierter Ansatz formulieren, bei dem keine Spannungsunstetigkeiten bei Plastifizierung auftreten:

$$d\epsilon_{ij} = \underbrace{d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}}_{d\epsilon_{ij}^P} + \underbrace{\frac{1+\nu}{E} (d\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} d\sigma_{kk})}_{d\epsilon_{ij}^E} \quad (3.6a)$$

$$F = \alpha_1 (\epsilon_V^P)^2 + \alpha_2 I_2^{**}, \quad (3.6b)$$

$$\alpha_1^{\oplus} = \frac{1}{2} \frac{1-2\nu}{3E} \geq \alpha_1 \geq \alpha_1^{\ominus} = 0; \quad \alpha_2 = \alpha_2^{\oplus} = \alpha_2^{\ominus} = \frac{1+\nu}{E} \quad (3.6c)$$

Stetigkeit des	Plastische
Spannungs-	Volumen-
zustandes	konstanz bei
bei Plasti-	hinreichender
fizierungs-	plastischer
beginn	Formänderung

Die Ansatzfunktion α_1 hängt im wesentlichen von der plastischen (Vergleichs-)Formänderung nach der vorangegangenen Plastifizierung ab; dies ist in Gl. (3.6b) zum

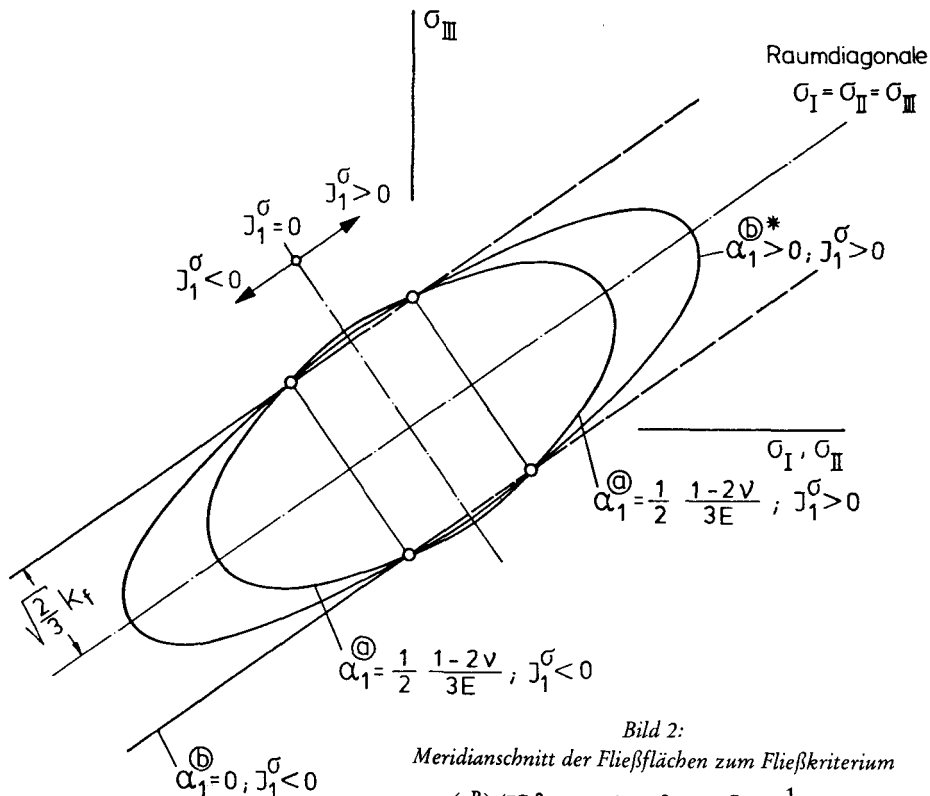
Ausdruck gebracht. Die Ansatzfunktion $\alpha_1(\epsilon_v^P)$ ist experimentell zu ermitteln. Der Ansatzfreiwert α_2 kann beim Übergang von ③ nach ④ konstant gehalten werden, da die notwendige Anpassung an einen Werkstoff mit plastischer Volumenkonstanz bei stetigem Spannungsvektor allein durch $\alpha_1 = \alpha_1(\epsilon_v^P)$ erreicht wird.

Mit $\alpha_1 = 0$ erhalten wir für def_j^P die Fließregel nach v. Mises¹⁾, und Gl. (3.6 a) stellt dann die Prandtl-Reuss'sche Beziehung dar. Daher ist für die Gln. (3.6) die Bezeichnung „modifizierter Prandtl-Reuss-Ansatz“ gerechtfertigt.

4. Fließflächen

Die Höhe des Fließpotentials wird durch die Formänderungsfestigkeit k_f des jeweiligen Werkstoffs bestimmt. Man kommt so zum Fließkriterium,

$$F - f(k_f) = 0, \quad (4.1)$$



¹⁾ Für $\alpha_1 = 0$ liefert Gl. (3.6 b) das Fließpotential $F = \alpha_2 I_2^σ = \frac{1+\nu}{E} I_2^σ$. Dies ist das Mises'sche Fließpotential, bei dem üblicherweise mit dem Faktor 1 gearbeitet wird, $F = I_2^σ$. Beide Darstellungen führen natürlich auf die Fließregel (1.3).

durch das im Hauptspannungsraum die Fließfläche aufgespannt wird. Wir veranschaulichen an der Fließfläche das in den Gln. (3.6) vorgestellte Modell. Hierfür gilt

$$f(k_f) = k_f^2 \left[\alpha_1 (\epsilon_v^p) + \frac{1}{3} \alpha_2 \right]. \quad (4.2)$$

Das Fließkriterium zu Gl.(3.6b) wird im Hauptspannungsraum durch ein Rotationsellipsoid um die Raumdiagonale dargestellt, das für $\alpha_1 = 0$ in einen Zylinder entartet (Mises-Zylinder). Man folgert aus dem einachsigen Belastungsfall sofort, daß die Koordinatenachsen alle vorgenannten Fließflächen in denselben Punkten durchstoßen. Also fallen auch die Durchdringungskreise aller Rotationsellipsoide unabhängig von α_1 zusammen (Bild 2). Diese beiden Durchdringungskreise haben den Radius des Mises-Zylinders:

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} k_f. \quad (4.3)$$

An den Fließflächen erkennt man besonders deutlich:

- Im Druckbereich ($I_1^q < 0$) ist das vorgestellte Modell plausibel. Bei Plastifizierung wird der Werkstoff zunächst „plastisch verdichtet“, wobei das Ellipsoid zum Zylinder entartet.
- Im Zugbereich ($I_1^q > 0$) steht der Entartung des Ellipsoids zum Zylinder die Vermutung entgegen, daß der Werkstoff nur beschränkt hydrostatischen Zug erträgt.

Daraus ist für die Gln.(3.6) zu folgern:

$$\alpha_1 = \alpha_1(\epsilon_v^p, I_1^q), \quad (4.4a)$$

$$\alpha_1^{\ominus} \geq \alpha_1 \geq \alpha_1^{\oplus} = 0 \text{ für } I_1^q < 0, \quad (4.4b)$$

$$\alpha_1^{\ominus} \geq \alpha_1 \geq \alpha_1^{\oplus*} > 0 \text{ für } I_1^q > 0. \quad (4.4c)$$

Die Gln. (4.4) führen dann zu einem „modifizierten Huber-Fließkriterium“ [7].

5. Ausblick

Das vorgestellte Modell muß experimentell überprüft werden. Dabei ist zu erwarten, daß der Knick in der Spannungs-Dehnungskurve bei \textcircled{a} besser durch einen Übergangsbogen ersetzt wird (gestrichelte Linie in Bild 1). Dann bleiben die vorgenannten Betrachtungen weiterhin sinnvoll, doch wird k_f im Bereich des Übergangsbogens zusätzlich von ϵ_v^p abhängen. Diese Abhängigkeit muß experimentell ermittelt werden.

Zuletzt sollte darauf hingewiesen werden, daß eine Vielzahl Veröffentlichungen zum elastisch-plastischen Werkstoffverhalten aus der Sicht der Festigkeitslehre bekannt geworden sind. Da hier aber die Umformtechnik im Vordergrund steht, wurde das Schrifttum der Festigkeitslehre nicht näher erörtert.

Literatur

- [1] REUSS, A.: Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätslehre; Z. angew. Math. Mech. 10 (1930), 266–274.
- [2] LIPPMANN, H. u. O. MAHRENHOLTZ: *Plastomechanik der Umformung metallischer Werkstoffe*; Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag 1967.
- [3] MISES, R. v.: Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen; Z. angew. Math. Mech. 8 (1928), 161–185.
- [4] ISMAR, H. u. O. MAHRENHOLTZ: *Technische Plastomechanik*; Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg-Verlag 1979.
- [5] MAHRENHOLTZ, O. u. H. ISMAR: Bemerkungen zu Fließfläche und Fließregel in der Plastomechanik; Z. angew. Math. Mech. 59 (1979), Heft 4.
- [6] BELTRAMI, E.: Sulle condizioni di resistenza dei corpi elastici, Rend. ist. lomb. d. sci. lett., Cl. mat. nat. 18 (1885), 705–714.
- [7] HUBER, M. T.: Właściwa praca odkształcenia jako miara wyteżenia materyalu, Czasopismo Techniczne (Lwów) 22 (1904), 38–81.